

Tentamen Calculus I, 6 februari 2008, 13:00–16:00.

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Alle (negen) opgaven tellen even zwaar. Het gebruik van boek(en), aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen niet toegestaan.

(1) Toon aan dat voor elk geheel getal $n \geq 0$ geldt, dat $n^5 - n$ deelbaar is door 10.

(2) Bewijs gebruik makend van de definitie van limiet, dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

(3) Bepaal $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \sin x}$.

(4) Wat is de afgeleide van $\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) + \int_{x-1}^{x+1} t \ln(t) dt$?

(5) De functie f wordt gegeven door $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{als } x \geq 0; \\ x^2 & \text{als } x < 0. \end{cases}$.
Leg uit waarom f wel/niet differentieerbaar is in $x = 0$.

(6) Bepaal een primitieve van $\sin(x) \cdot \sinh(x)$.

(7) Bereken $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. Hint: $y^2 = x - x^2$ kan je parametriseren als $x = 1/(t^2 + 1)$ en $y = t/(t^2 + 1)$.

(8) Geef een niet-constante oplossing $y(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$-2y' = xy^2 + y^2 - x - 1.$$

(9) Bepaal de booglengte van de grafiek van $f(x) = (x-5)\sqrt{5-x}$ tussen $x = 0$ en $x = 5$.